27/3/19

Επεκτάσεις Συνεχών Συναρτήσεων

Πρόταση: (X, d) μ.χ.

(Y, ρ) πλήρης μ.χ.

$A \subseteq X$, A πυκνό (δηλ. $\overline{A} = X$)

$f : A \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής

$\Rightarrow$ Η f έχει μοναδική ομοιόμορφα συνεχή επέκταση στο X

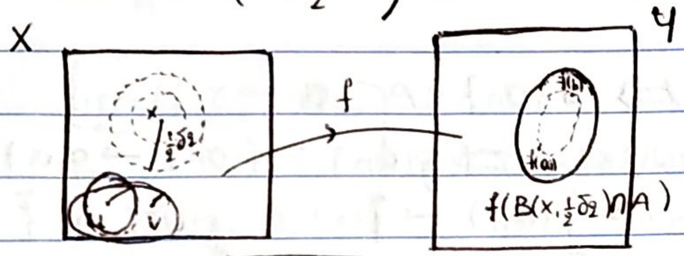
Απόδ. (ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ)

$\varepsilon > 0$

f ομοιόμ. συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : d(a,b) < \delta_\varepsilon,\ a,b \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(f(a), f(b)) < \varepsilon \quad (1)$

$x \in X \to B(x, \frac{1}{2}\delta_\varepsilon)$



$\delta(K) = \delta(\overline{K})$

$\delta(K) = \sup\limits_{x,y \in K} \rho(x,y)$

$(1) \Rightarrow \delta\left[f(B(x, \frac{1}{2}\delta_\varepsilon) \cap A\right] \leq \varepsilon \quad (2)$

(Χαρακτηρισμός πληρότητας 1.9 (iv):
$\mathcal{F}$ αλυσίδα κλειστών μη κενών υποσυνόλων του Y
$\inf\limits_{F \in \mathcal{F}} \delta(F) = 0 \Rightarrow \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \{y_0\}$)

Θέτουμε $\tilde{f}(x) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \overline{f(B(x, \frac{1}{2}\delta_\varepsilon) \cap A)}$ (καλώς ορισμένη από 1.9 (iv))

Αν το $x \in A \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$

(γιατί το $f(x) \in f(B(x, \frac{1}{2}\delta_\varepsilon) \cap A)$ $\forall \varepsilon > 0$)

Άρα η $\tilde{f}$ επεκτείνει την f

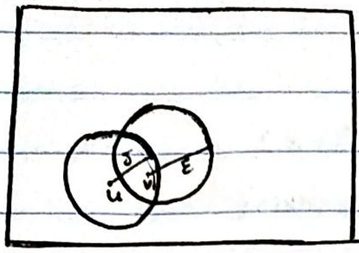
Θ.υ.δ.ο. $\tilde{f}$ ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\gamma > 0$.

Εφαρμόζουμε την (1) για $\varepsilon = \frac{\gamma}{3} \longrightarrow \delta = \frac{1}{2} \cdot \delta_{\gamma/3}$

$\rightarrow$

Εστω $u, v \in X : d(u,v) < \delta$

X 

$\exists \alpha \in A : \alpha \in S(u,\delta) \cap S(v,\delta)$

$(S(u,\delta) \cap S(v,\delta) \neq \emptyset$ κ· ανοικτό$)$

Εφαρμόζουμε την (2) : $\alpha \in B(u, \frac{1}{2}\delta)$

$\rho(f(\alpha), f(u)) \le \frac{\varepsilon}{3}$

Ομοίως $\rho(f(\alpha), f(v)) \le \frac{\varepsilon}{3}$

Αρα : $\rho(f(u), f(v)) \le \rho(f(u), f(\alpha)) + \rho(f(\alpha), f(v))$

$\le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Αρα η $\tilde{f}$ ομοιόμορφα συνεχής

Μοναδικότητα:

Εστω $g : X \to Y$ συνεχής

$g|_A = f$

$x \in X = \bar{A} \Rightarrow \exists \{a_n\} \subseteq A : a_n \to x$

Αφού g συνεχής $\Rightarrow g(a_n) = f(a_n) \to g(a)$

Όμως $f(a_n) = \tilde{f}(a_n) \to \tilde{f}(x)$ γιατί η $\tilde{f}$ συνεχής

Αρα $\tilde{f}(x) = g(x)$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$:

$Y =$ πλήρης

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

f συνεχής κ· όχι ομοιόμ. συνεχής

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ πυκνό στο $\mathbb{R}$

Η f δεν έχει επέκταση σε συνεχή

ΘΕΩΡΗΜΑ Επέκτασης Tietze:

(X,d) μ.χ.

$A \subseteq X$ κλειστό

$f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\Rightarrow \exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ συνεχής επέκταση της f :

$$\inf_{x \in X} \tilde{f}(x) = \inf_{x \in A} f(x), \quad \sup_{x \in X} \tilde{f}(x) = \sup_{x \in A} f(x)$$

ΑΣΚΗΣΗ (9-1)

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

$\overset{\shortparallel}{(0,+\infty)}$

Δ.ο. η f δεν έχει συνεχή επέκταση $\tilde{f}: \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to (Y, \rho)$

όπου (Y,ρ) είναι οποιοσδήποτε **υπερχώρος** του $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ:

Έστω $f(0) = z \in Y$ κ. $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to Y$ συνεχής

$z \notin \mathbb{R}$ $\left(\underbrace{\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{R}}} f(x)}_{=-\infty} \notin \mathbb{R} \right)$

Επίσης $z \notin cl_Y(\mathbb{R})$ $\left(\text{αφού } \mathbb{R} \text{ πλήρης} \overset{1.9}{\underset{(ii)}{\Rightarrow}} \mathbb{R} \subseteq Y \text{ κλειστό} \Rightarrow cl_Y(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \right)$

Όμως $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho} 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = z \\ f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow z \in cl_Y(\mathbb{R}) \quad \underline{\text{ΑΤΟΠΟ}}$$

ΑΣΚΗΣΗ (9-2)

(X,d) μ.χ. , $S \subseteq X$

$f: S \to \mathbb{R}$ ομοιόμ. συνεχής κ. φραγμένη

Δ.ο. η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή $\tilde{f}: X \to I$,

όπου $I = \left[\inf_{x\in S} f(a), \sup_{x\in S} f(x) \right] \subseteq \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:

Το S δεν είναι πυκνό στο X, άρα δεν μπορώ να εφαρμόσω το θεώρ.

Θεώρ. Tietze απαιτεί μόνο κλειστότητα

$S \subseteq \overline{S}$, S πυκνό στο $\overline{S}$ κ. $f: S \to I$ ομοιόμ. συνεχής κ. I πλήρες

→

$\underline{\text{Πρόταση 2.1}} \Rightarrow \exists f_1 : \overline{S} \to I$ συνεχής επέκταση

Εφαρμόζουμε θεώρ. Tietze για την f_1:

$\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ συνεχής επέκταση της f_1

$I \ni \inf f(x) \leq \tilde{f}(x) \leq \sup f(x) \in I$

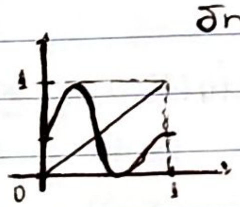
$\Rightarrow \tilde{f}(x) \in I$

▸ **Θεώρημα Banach Σταθερού Σημείου**

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: $f : [0,1] \to [0,1]$

$\Rightarrow$ Η f έχει σταθερό σημείο

δηλ. $\exists x_0 \in [0,1] : f(x_0) = x_0$



Θ.Ε.Τ. Άσκηση

$\underline{\text{Πρόταση}}$: (Y, d) πλήρης μ.χ.

$T : Y \to Y$ ώστε: $d(Tx, Ty) \leq a \cdot d(x,y)$, $x,y \in X$, $a \in (0,1)$

$(Tx := T(x))$

$\Rightarrow \exists$ μοναδικό $x_0 \in Y : Tx_0 = x_0$

$\underline{\text{Αποδ.}}$:

• $\boxed{\text{Μοναδικότητα}}$: Αν $T(x_0) = x_0$, $T(y_0) = y_0$

$\Rightarrow d(T(x_0), T(y_0)) \leq a \cdot d(x_0, y_0)$

$\Rightarrow d(x_0, y_0) \leq a \cdot d(x_0, y_0)$

Αν $d(x_0, y_0) > 0$ τότε δεν ισχύει

άρα $d(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$

Θέτουμε: $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T^2 \circ T$, ...

$y \in Y$

$$\left.\begin{aligned} &\cancel{d(Ty, T^2y)} \leq a \cdot d(y, Ty) \\ (*)\quad &d(T^2y, T^3y) \leq a \cdot \cancel{d(Ty, T^2y)} \\ &\vdots \\ &d(T^ny, T^{n+1}y) \leq a \cdot d(T^{n-1}y, T^ny) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$d(Ty^n, Ty^m) \le a^n \cdot d(y, Ty) \quad (2)$$

Πολλ/ζουμε κατά μέλη $\Downarrow$

(*) Παρατήρηση: Εάν $Ty = Ty^2$ τότε $Ty = x_0$ (στθ. σημείο)

Άρα γι' αυτό υποθ. ότι κανένα δεν είναι ίσο.

$m > n$: $d(Ty^n, Ty^m) \le d(Ty^n, Ty^{n+1}) + \ldots + d(Ty^{m-1}, Ty^m)$

$\le a^n \cdot d(y, Ty) + a^{n+1} \cdot d(y, Ty) + \ldots + a^{m-1} \cdot d(y, Ty)$

$\le \frac{a^n}{1-a} \cdot d(y, Ty) \to 0$

Άρα $(T^n(y))$ ακολ. Cauchy

$\Rightarrow T^n(y) \to x_0$

$\xRightarrow[(T \text{ Lipschitz})]{T \text{ ομ. συν.}} T(T^n(y)) \to T(x_0)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ (3-1)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφ/σιμη, $|f'(x)| \le k < 1$, $k \in (0,1)$

Δ.ο. η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

<u>ΛΥΣΗ</u>:

$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x-y)$, ξ μεταξύ των x, y

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le k \cdot |x-y|$, $k \in (0,1)$

$\xRightarrow[\text{Θεωρ. Banach στθ. σημείου}]{} \exists$ μοναδικό σταθερό σημείο

ΑΣΚΗΣΗ : (3-3)

Αν $d(Tx, Ty) < d(x,y)$ (1) $\Rightarrow$ Αν έχουμε σταθερό σημείο, είναι μοναδικό

(Εύκολο, όπως στην Αποδ. Θεωρ.)

Δεν είναι σίγουρο όμως ότι έχουμε σταθερό σημείο αν ισχύει η (1)

Π.χ. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \log(1+e^x)$, $|T'(x)| < 1$

Σχόλιο : (X, d) μ.χ.

$\mathcal{F}$ αλυσίδα μη κενών υποσυνόλων του X

$\Updownarrow$

$(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq B$ ή $B \subseteq A)$

(1) $\inf_{A \in \mathcal{F}} \delta(A) = 0$ κ. $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$ (2)

Τότε κάθε $A \in \mathcal{F}$ έχει άπειρα στοιχεία.

Αποδ. :

$A_0 = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}$

(1) $\Rightarrow \exists A_1 \subseteq A_0 : A_1 = \{x_n\}$ μονοσύνολο

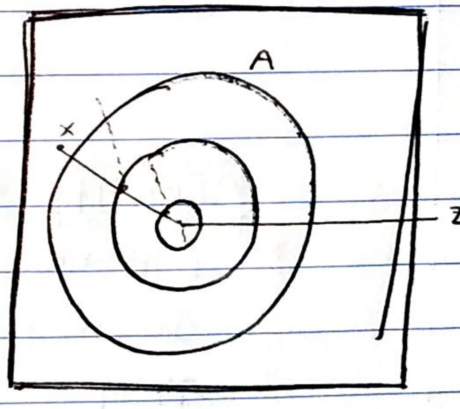
$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq A_1 \Rightarrow A = \{x_n\}$

ή

$A_1 \subseteq A \Rightarrow x_i \in A$

$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ περιέχει το x_i

ΑΤΟΠΟ



$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ (6-3 Κεφαλαιο 1):

(X,d) μ.χ.

$\mathcal{F}$ αλυσίδα μη κενών υποσυνόλων του X

$\inf\limits_{A\in\mathcal{F}} \delta(A)=0$, $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} \bar{A}=\emptyset$

$z\notin X$

$\Rightarrow$ Η μετρική d μπορεί να επεκταθεί στο $Y=X\cup\{z\}$:

$$cl_Y(A)=cl_X(A)\cup\{z\} \quad \forall A\in\mathcal{F}$$

ΛΥΣΗ:

Θέτω $d(z,z)=0$ κ. $d(x,z)=d(z,x)=\sup\limits_{A\in\mathcal{F}} d(x,A)$

Θ.ν.δ.ο. η επέκταση αυτή d είναι μετρική.

Το μόνο που χρειάζεται απόδειξη είναι το εξής:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \quad , \quad x,y\in X \text{ (τριγων. ανισ.)}$$

$\varepsilon>0$

$\exists A_0 : x,y\notin A_0$ κ. $\delta(A_0)<\varepsilon$

Από τον ορισμό της απόστασης:

$\exists x_1\in A_0 : d(x,x_1)<d(x,A_0)+\varepsilon$

$\exists y_1\in A_0 : d(y,y_1)<d(y,A_0)+\varepsilon$

$d(x,y)\le d(x,x_1)+d(x_1,y_1)+d(y_1,y)$

$\le d(x,A_0)+\varepsilon+d(y,A_0)+\varepsilon \le d(x,z)+d(y,z)+2\varepsilon$

κ. επειδή ε αυθαίρετο:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

Θ.α.ο. το z ανήκει σε όλες τις κλειστότητες:

$A_0\in\mathcal{F}$, $\varepsilon>0$

$x\in A_1\subseteq A_0$ κ. $\delta(A_1)<\varepsilon \Rightarrow d(x,A)=0$ αν $A_1\subseteq A$

$d(x,A)\le\varepsilon$, $A\subseteq A_1$

$\Rightarrow d(x,z)\le\varepsilon$

$\Rightarrow d(x,A)=0$, ε αυθαίρετο